20/12/19

rank A
- → πλήθος γραμμικά ανεξαρ. γραμμών
- → πλήθος γραμμικά ανεξαρ. στηλών

∃ αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q ώστε

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad r = \operatorname{rank} A$$

$A_{m\times n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

κανονικές βάσεις

Ο πίνακας των σταθερών όρων είναι ο

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

και ο πίνακας $(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

καλείται ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

<u>Ορισμός</u>

Έστω το γραμμικό σύστημα $AX=b$ όπου A ένας $m \times n$ πίνακας $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Αν το διάνυσμα $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ επαληθεύει το σύστημα δηλαδή $A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}} b$, τότε το $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix}$ θα καλείται λύση του συστήματος.

Ένα σύστημα $AX=b$ θα καλείται ομογενές αν $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Δυο συστήματα $AX=b$ και $A'x=b'$ θα καλούνται ισοδύναμα αν και μόνο αν κάθε λύση του ενός είναι και λύση του άλλου.

Ερωτήματα

1) Έχει πάντα λύση ένα σύστημα;

ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ

2) Αν έχει λύση από τι εξαρτάται;

Το ομογενές σύστημα $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ έχει πάντα τη μηδενική λύση

Μας ενδιαφέρει όμως να εξετάσουμε αν έχει και μη-μηδενικές λύσεις

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{A}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1}$$

Δηλαδή με τον A ορίζεται μια γραμμική απεικόνιση

$\ker A$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{Im} A$

$n = \dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A$

Τι σημαίνει ότι το διάνυσμα $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} A$

$\exists \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ώστε $A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{l} f [0,1] \to \mathbb{R} \\ 5 \quad \exists\, a \in [0,1] \text{ ώστε} \\ \quad f(a) = 5 \end{array} \right)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} = b_1 \\ = b_2 \\ \\ = b_m \end{array}$$

Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους έχει μορφή

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ορισμός:
Ένα σύστημα $AX=b$ θα καλείται συμβιβαστό αν έχει τουλάχιστον μία λύση.

Έστω το σύστημα $AX=b$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα $AX=b$ έχει λύση Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ το οποίο το ικανοποιεί

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} c_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} c_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)}c_1 + A^{(2)}c_2 + \dots + A^{(n)}c_n = b$$

Η στήλη b είναι γραμμ. συνδυασμός των στηλών του A.

Όταν το σύστημα έχει λύση τότε η στήλη b είναι γρ. συνδυασμός των στηλών του A. Αυτό ισχύει και αντίστροφα:
Αν η στήλη b είναι γρ. συνδυασμός των στηλών του A τότε το σύστημα έχει λύση

Θεώρημα

Το μη-ομογενές γραμμικό σύστημα $AX=b$ έχει λύση αν και μόνο αν η στήλη b είναι γρ. συνδυασμός των στηλών του A.

$$\operatorname{rank}(A,b) = \operatorname{rank} A$$

Πόρισμα

Το γραμμικό σύστημα $AX=b$ έχει λύση αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A,b) = \operatorname{rank} A$.

π.χ $AX = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ Να εξετάσετε αν το σύστημα έχει λύση για

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Έχει λύση $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A,b)$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & -4 & -11 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -10 & -8 & -22 & -40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 4 & 11 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{rank}(A,b) = \operatorname{rank} A = 3$$

Άρα έχει λύση.

π.χ Να εξετάσετε το ίδιο ερώτημα αν $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & -4 & -11 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -10 & -8 & -22 & -41 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 10 & 8 & 22 & 41 \\ 0 & \underset{5}{0} & \underset{4}{0} & \underset{11}{0} & \underset{20}{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & -8 & -19 \\ 0 & 0 & \underset{-6}{\cancel{0}} & \underset{-4}{0} & \underset{-10}{0} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & 19 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}\,A = 3 \neq \text{rank}(A, b) = 4$

Άρα το σύστημα δεν έχει λύση

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$X \longmapsto AX$

Το σύστημα $AX = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $b \in \text{Im}A$

Αν το σύστημα έχει λύση ($\text{rank}A = \text{rank}(A, b)$) από τι εξαρτάται πόσες λύσεις έχει;

π.χ Να εξετάσετε το ίδιο ερώτημα αν $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & -4 & -11 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -10 & -8 & -22 & -41 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 10 & 8 & 22 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & 5 & 4 & 11 & 20 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & -8 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & 19 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -6 & -4 & -10 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} A = 3$ + $\operatorname{rank}(A,b) = 4$

Άρα το σύστημα δεν έχει λύση

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$X \longmapsto AX$$

Το σύστημα $AX = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $b \in \operatorname{Im} A$

Αν το σύστημα έχει λύση ($\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A,b)$) από τι εξαρτάται πόσες λύσεις έχει;

Αυτό το σύστημα έχει μόνο την μηδενική λύση

π.χ Να διερευνηθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + ay + 2z &= 0 \\ -x + 2y + az &= 0 \\ ax - 3y + (a+1)z &= 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή να βρεθούν οι τιμές του a ώστε το σύστημα να έχει μοναδική ή περισσότερες λύσεις.

Το σύστημα μας είναι 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \\ a & -3 & a+1 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα θα έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow \dim \ker A = 0 \Leftrightarrow 3 = \operatorname{rank} A \Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0 \longrightarrow$ (τάξη πίνακα)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \\ a & -3 & a+1 \end{pmatrix}$$

Αν $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 2+a & 2+a \\ 0 & -3-a^2 & a+1-2a \end{pmatrix}$$

$a=-2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Αν $a=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$a=0$ ο πίνακας έχει rank $=3$ Άρα μοναδική λύση

$\operatorname{rank} A = 2$ έχει μη μηδενικές λύσεις διάστασης 1. Δηλαδή ο $\dim \ker A = 1$ (άπειρες λύσεις)

Το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 0 \\ 7y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z &= \frac{7}{3}y \\ x &= 2y - \frac{14}{3}y = -\frac{8}{3}y \end{aligned}$$

$\ker A = \left\{ \left(-\frac{8}{3}y, y, \frac{7}{3}y\right) \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(-\frac{8}{3}, 1, \frac{7}{3}\right) \right\rangle$

$a \neq 0, -2$ $\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2+3 & a-1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1-a^2-3 \end{pmatrix}$

$a^2 - a + 4 \neq 0 \iff$ έχουμε μοναδική λύση
$a^2 - a + 4 = 0 \iff$ έχουμε περισσότερες λύσεις
αδύνατο

$a \neq -2$ έχουμε μοναδική λύση
$a = -2$ έχουμε άπειρες λύσεις

$AX = \bar{0}$ έχει περισσότερες λύσεις $\iff n - \operatorname{rank} A > 0$
Έστω το ομογενές $AX = \bar{0}$ και το $AX = b$
Έστω $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_n \end{pmatrix}$ μια λύση του ομογενούς

$A \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \bar{0}$

Έστω $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix}$ μια λύση του $AX = b$ $A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$A \left[\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \right] = A \begin{bmatrix} d_1 + c_1 \\ d_2 + c_2 \\ \vdots \\ d_n + c_n \end{bmatrix} =$

επίσης λύση

$A \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_m \end{pmatrix}$

Αν λοιπόν έχουμε μια λύση του συστήματος $AX=b$ και μια λύση του αντίστοιχου ομογενούς $AX=\bar{0}$ τότε δημιουργούμε μια νέα λύση η οποία δίνεται σαν το άθροισμα των δύο προηγούμενων.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω το σύστημα $AX=b$ και το αντίστοιχο ομογενές $AX=\bar{0}$. Υποθέτουμε ότι το σύστημα $AX=b$ έχει λύση ($\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A,b)$) και $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ μία λύση του. Τότε κάθε λύση του θα δίνεται σαν άθροισμα της $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ και μιας λύσης του αντίστοιχου ομογενούς. Δηλαδή ο χώρος των λύσεων του $AX=b$ δίνεται από το σύνολο $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \ker A$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ μια λύση του $AX=b$ και $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ μια λύση του $AX=\bar{0}$. Τότε το $\begin{pmatrix} c_1+d_1 \\ \vdots \\ c_n+d_n \end{pmatrix}$ είναι επίσης λύση του $AX=b$

$$A\begin{pmatrix} c_1+d_1 \\ \vdots \\ c_n+d_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = b+\bar{0} = b$$

Έστω $\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$ μια άλλη λύση του $AX=b$. Δηλαδή

$$A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = b - b = \bar{0}$$

$$A \begin{pmatrix} c_1 - c_1' \\ \vdots \\ c_n - c_n' \end{pmatrix} = \bar{0} \iff \begin{pmatrix} c_1 - c_1' \\ \vdots \\ c_n - c_n' \end{pmatrix} \in \ker T \iff$$

$$\exists \begin{pmatrix} d_1' \\ \vdots \\ d_n' \end{pmatrix} \in \ker A \quad \text{ώστε} \quad \begin{pmatrix} c_1 - c_1' \\ c_2 - c_2' \\ c_n - c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1' \\ \vdots \\ d_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1' \\ \vdots \\ d_n' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_1' \\ \vdots \\ -d_n' \end{pmatrix}$$

Δείξαμε ότι κάθε λύση του $AX = b$ θα δίνεται σαν άθροισμα

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_1' \\ \vdots \\ d_n' \end{pmatrix}}_{\in \ker A}$$

<u>Πόρισμα</u>

Αν το σύστημα $AX = b$ έχει λύση, τότε το πλήθος των λύσεων του εξαρτάται από το πλήθος των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς. Το πλήθος των λύσεων του ομογενούς δίνεται από $n - \operatorname{rank} A = \dim \ker A$.